Ejercicio 2.8.

Existe en $\mathbb{R}^3$ un producto interno tal que $\langle e_1, e_1\rangle = 2$, $\langle e_2, e_2\rangle = 3$, $\langle e_3, e_3\rangle = 4$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ y $\langle e_2, e_3\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = 1$.

Demostración. Es suficiente definir la aplicación $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que para cada $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$,

$$\left\langle x, y\right\rangle := (2x_1 + x_3)y_1 + (3x_2 + x_3)y_2 + (x_1 + x_2 + 4x_3)y_3.$$

Entonces $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno. En efecto,

1. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ y $z = (z_1, z_2, z_3)$ entonces

$$\begin{aligned}\left\langle x+z, y\right\rangle &= [2(x_1+z_1)+x_3+z_3]y_1 + [3(x_2+z_2)+x_3+z_3]y_2 + [x_1+y_1+x_2+z_2+ \\ &\qquad\qquad + 4(x_3+z_3)]y_3 \\ &= (2x_1+x_3)y_1 + (3x_2+x_3)y_2 + (x_1+x_2+4x_3)y_3+ \\ &\qquad + (2z_1+z_3)y_1 + (3z_2+z_3)y_2 + (z_1+z_2+4z_3)y_3 \\ &= \left\langle x, y\right\rangle + \left\langle z, y\right\rangle\end{aligned}$$

   De manera similar que comprueba que $\left\langle \alpha x, y\right\rangle = \alpha\left\langle x, y\right\rangle$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ y todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Si $x = (x_1, x_2, x_3)$ y $y = (y_1, y_2, y_3)$ entonces

$$\begin{aligned}\left\langle x, y\right\rangle &= (2x_1+x_3)y_1 + (3x_2+x_3)y_2 + (x_1+x_2+4x_3)y_3 \\ &= (2y_1+y_3)x_1 + (3y_2+y_3)x_2 + (y_1+y_2+4y_3)x_3 \\ &= \left\langle y, x\right\rangle.\end{aligned}$$

3. Si $x = (x_1, x_2, x_3) \neq 0$ entonces

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= (2x_1+x_3)x_1 + (3x_2+x_3)x_2 + (x_1+x_2+4x_3)x_3 \\ &= (2x_1^2+3x_2^2+4x_3^2) + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 \\ &= x_1^2 + (x_1+x_3)^2 + (x_2+x_3)^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 > 0\end{aligned}$$

Esto muestra que la función $\left\langle x, y\right\rangle := (2x_1+x_3)y_1 + (3x_2+x_3)y_2 + (x_1+x_2+4x_3)y_3$ es un producto interno sobre $\mathbb{R}^3$.
Si $x = y = e_1 = (1,0,0)$ entonces reemplazando en la función dada se obtiene $\langle e_1, e_1\rangle = 2$. De manera similar se comprueba fácilmente que $\langle e_2, e_2\rangle = 3$, $\langle e_3, e_3\rangle = 4$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ y $\langle e_2, e_3\rangle = \langle e_1, e_3\rangle = 1$. ∎