Ejercicio 2.7.

Dados los números reales a, b y c, a fin de que exista en $\mathbb{R}^2$ un producto interno tal que $\langle e_1, e_1\rangle = a$, $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_1\rangle = b$ y $\langle e_2, e_2\rangle = c$, es necesario y suficiente que $a > 0$ y $ac > b^2$.

Demostración. Sean a, b y c números reales cualesquiera. Suponga en primer lugar que en $\mathbb{R}^2$ existe un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ tal que

$$\langle e_1, e_1\rangle = a,\ \langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_1\rangle = b \ \text{ y } \ \langle e_2, e_2\rangle = c,$$

donde $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$.
Observe que por ser $e_1 \neq 0$ entonces $a = \langle e_1, e_1\rangle > 0$. Es decir, $a > 0$. Análogamente se demuestra que $c > 0$.
Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno entonces para todo $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$ se tiene

$$\begin{aligned}\big\langle x, y\big\rangle &= \big\langle x_1e_1 + x_2e_2, y_1e_1 + y_2e_2\big\rangle \\ &= x_1y_1\langle e_1, e_1\rangle + x_1y_2 + x_2y_1\langle e_1, e_2\rangle + x_2y_2\langle e_2, e_2\rangle .\end{aligned}$$

En particular, para $x = (x_1, x_2) = y$ se obtiene, de la última de las igualdades anteriores, que

$$\langle x, x\rangle = ax_1^2 + 2bx_2x_1 + cx_2^2. \tag{1.8}$$

Como $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es un producto interno entonces para $x = (x_1, x_2) \neq 0$ se tiene en la ecuación (1.8) que $\langle x, x\rangle > 0$. Es decir $ax_1^2 + 2bx_2x_1 + cx_2^2 > 0$. Esta desigualdad implica, respecto al discriminante, que siendo $a > 0$ y suponiendo $x_2 \neq 0$, se tiene

$$4x_2^2b^2 - 4acx_2^2 < 0,$$

de lo cual resulta $b^2 < ac$. Análogamente, si suponemos $x_1 \neq 0$ y como $c > 0$ entonces de la ecuación (1.8) se obtiene $cx_2^2 + 2bx_2x_1 + ax_1^2 > 0$, de lo cual resulta $4x_1^2b^2 - 4acx_1^2 < 0$ y, por tanto, nuevamente $b^2 < ac$. En conclusión, dado un producto interno $\langle\cdot,\cdot\rangle$ en $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle e_1, e_1\rangle = a$, $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_1\rangle = b$ y $\langle e_2, e_2\rangle = c$, donde $e_1 = (1,0)$ y $e_2 = (0,1)$, entonces $b^2 < ac$.
Recíprocamente, sea $\langle\cdot,\cdot\rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\big\langle x, y\big\rangle = ax_1y_1 + b(x_1y_2 + x_2y_1) + cx_2y_2. \tag{1.9}$$

y suponga que $a > 0$ y $b^2 < ac$ (observe que esto implica que debe ser también $c > 0$). Es claro que $\langle\cdot,\cdot\rangle$ es bilineal, simétrico y además $\langle e_1, e_1\rangle = a$, $\langle e_1, e_2\rangle = \langle e_2, e_1\rangle = b$ y $\langle e_2, e_2\rangle = c$. Además de esto, si $x = (x_1, x_2)$ es un vector no nulo entonces $4x_1^2b^2 - 4acx_1^2 < 0$ para $x_1 \neq 0$ o $4x_2^2b^2 - 4acx_2^2 < 0$ para $x_2 \neq 0$, es decir, el discriminante de $ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2$ es siempre negativo, por tanto, siendo $a > 0$ y $c > 0$, resulta

$$\langle x, x\rangle = ax_1^2 + 2bx_1x_2 + cx_2^2 > 0.$$

Luego (1.9) define un producto interno en $\mathbb{R}^2$. ∎

Caso específico

Considerando $a = 3 > 0$, $b = 4$ y $c = 7$ entonces, de acuerdo al Ejercicio 2.7, existe un producto interno en $\mathbb{R}^2$ tal que $\langle e_1, e_1 \rangle = 3$, $\langle e_1, e_2 \rangle = \langle e_2, e_1 \rangle = 4$ y $\langle e_2, e_2 \rangle = 7$. Dicho producto, de acuerdo a la igualdad (1.9), es dado por

$$\big\langle x, y \big\rangle = 3x_1 y_1 + 4(x_1 y_2 + x_2 y_1) + 7x_2 y_2,$$

para todo $x = (x_1, x_2)$ e $y = (y_1, y_2)$ en $\mathbb{R}^2$.