Ejercicio 2.5.

Considere en $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$ la norma euclidiana. Las siguientes afirmaciones respecto de una aplicación lineal $A\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ son equivalentes:

1. $\|Ax\| = \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^m$;
2. $\left\|Ax - Ay\right\| = \left\|x - y\right\|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^m$;
3. $\left\langle Ax, Ay\right\rangle = \left\langle x, y\right\rangle$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^m$;
4. Todo conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^m$ es transformado por A en un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$;
5. $A^* A = I_m$ (aplicación identidad de $\mathbb{R}^m$)
6. Las columnas de la matriz de A forman un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$.

Cuando $m = n$, se tiene también $AA^* = I_m$ y la aplicación lineal A se llama *ortogonal*.

Demostración. Puesto que se están considerando las normas euclidianas, las cuales provienen del producto interno canónico, se tiene

$$\|u + v\|^2 = \langle u + v, u + v\rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2\langle u, v\rangle .$$

Suponiendo (1) entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^m$,

$$\left\|Ax - Ay\right\| = \left\|A(x - y)\right\| = \left\|x - y\right\| .$$

Luego (1) implica (2).
Suponiendo que se cumple (2), entonces en particular

$$\left\|Ax + Ay\right\| = \left\|A(x + y) - A(0)\right\| = \left\|x + y - 0\right\| = \left\|x + y\right\| .$$

De esto resulta que

$$\begin{aligned}
\left\langle Ax, Ay\right\rangle &= \frac{1}{4}\left(\left\|Ax + Ay\right\|^2 - \left\|Ax - Ay\right\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\left\|x + y\right\|^2 - \left\|x - y\right\|^2\right)\\
&= \left\langle x, y\right\rangle .
\end{aligned}$$

Luego (2) implica (3).
Suponga que se cumple (3) y sea $X \subseteq \mathbb{R}^m$ un conjunto ortonormal. Dados cualesquiera $u, v \in A(X)$ existen $x, y \in X$ tales que $u = Ax$ y $v = Ay$. Luego

$$\langle u, v\rangle = \left\langle Ax, Ay\right\rangle = \left\langle x, y\right\rangle = \delta_{ij},$$

donde la última igualdad se debe a que X es ortonormal. Entonces $A(X)$ es ortonormal y, por tanto, (3) implica (4).
Suponga la validez de (4), y sea $\{u_1, \dots, u_m\}$ una base ortonormal de $\mathbb{R}^m$. De la hipótesis resulta que el conjunto $\{Au_1, \dots, Au_m\}$ es ortonormal, luego

$$\left\langle Au_i, Au_j\right\rangle = \left\langle u_i, u_j\right\rangle, \text{ para todo } i, j.$$

Fijando i y haciendo variar j, la igualdad anterior implica que

$$\langle A^* Au_i, u_j\rangle = \langle Au_i, Au_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle$$

y, por tanto, $\langle A^* Au_i - u_i, u_j\rangle = 0$. Como esto vale para todo elemento básico u_j entonces $A^* Au_i - u_i = 0$. Es decir, para todo vector básico u_i se tiene que $A^* Au_i = u_i$, lo cual implica la igualdad $A^* Ax = x$, para todo $x \in \mathbb{R}^m$. Por tanto, $A^* A = I_m$. Esto muestra que (4) implica (5).
Ahora suponemos (5). Si $M = (a_{ij})_{n\times m}$ es la matriz asociada a A entonces $M^* = (a_{ji})_{m\times n}$ es la matriz asociada a A^*. Luego $A^* \circ A$ tiene como matriz asociada al producto $M^* M$, cuyos elementos son

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} a_{kj} = \langle Ae_i, Ae_j\rangle .$$

Pero como $A^* \circ A = I_m$ entonces $M^* M$ es la matriz identidad, luego $c_{ij} = 1$ para $i = j$ y $c_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Esto se traduce en las igualdades $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = 1$ para $i = j$ y $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = 0$ para $i \neq j$. Pero como los vectores Ae_j son precisamente las columnas de M, se obtiene lo afirmado en (6).
Finalmente suponga que se cumple (6), es decir, $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = \delta_{ij}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{m} x_i Ae_i, \sum_{j=1}^{m} x_j Ae_j \right\rangle \\
&= \sum_{i,j} x_i x_j \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \|x\|^2 ,
\end{aligned}$$

luego $\|Ax\| = \|x\|$, que es lo afirmado en (1).
En el caso $m = n$, del item (5) se deduce que A^* es una inversa a la izquierda de A, luego A es inyectiva. Como $\mathbb{R}^n$ es de dimensión finita esto a su vez implica que A es sobreyectiva y, por tanto, biyectiva. Entonces de la igualdad $A^* A = I_n$ se deduce que $A^{-1} = A^*$. En particular $I_m = AA^{-1} = AA^*$. ∎