Ejercicio 2.4.

Una aplicación lineal $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es *simétrica* cuando $A = A^*$. Pruebe que el conjunto $\mathscr{S}$ de las aplicaciones lineales simétricas constituye un subespacio vectorial de dimensión $n(n+1)/2$ en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Cuando $A^* = -A$, se dice que A es *antisimétrica*. Pruebe que el conjunto $\mathscr{A}$ de las aplicaciones lineales anti-simétricas es un subespacio vectorial de dimensión $n(n-1)/2$ en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ y que toda aplicación lineal A se escribe de modo único, como suma de una aplicación simétrica con una anti-simétrica, esto es, $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \mathscr{T} \oplus \mathscr{A}$.

Demostración. Considere en $\mathbb{R}^n$ el producto interno canónico, y la base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$. Se tienen los conjuntos

$$\mathscr{S} = \left\{A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) :\ A^* = A\right\}, \qquad \mathscr{A} = \left\{A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) :\ A^* = -A\right\}$$

1. Observe que las transformaciones lineales identidad y nula son elementos de $\mathscr{S}$, pues la adjunta de la identidad es ella misma, y lo propio sucede con la transformación nula. Además de esto si $T, S \in \mathscr{S}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$(\alpha T + S)^* = \alpha T^* + S^* = \alpha T + S,$$

es decir $\alpha T + S \in \mathscr{S}$. Esto muestra que $\mathscr{S}$ es un subespacio vectorial de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Para obtener información sobre la dimensión de $\mathscr{S}$, vamos a exhibir una base para este subespacio. Para ello recordemos las transformaciones lineales T_{ij} dadas en las igualdades (1.2) del Ejercicio 1.1. Estas son definidas como $T_{ij}(x) = x_i e_j$, de modo que cuando $x = e_k$ se tiene

$$T_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i, \\ e_j, & \text{si } k = i. \end{cases} \tag{1.3b}$$

A fin de hallar la adjunta de T_{ij}, considere la aplicación $R_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ definida como

$$R_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq j, \\ e_i, & \text{si } k = j. \end{cases} \tag{1.3c}$$

Observe que $R_{ij} = T_{ji}$. Además, para todo i, k, j, l,

$$\left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } k \neq i \\ \left\langle e_j, e_l \right\rangle, & \text{si } k = i \end{cases}$$
$$\left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } l \neq j \\ \langle e_k, e_i \rangle, & \text{si } l = j. \end{cases}$$

y de aquí se deduce que $\left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle$. En efecto,

$$\begin{aligned}
&\text{para } i = k \text{ y } j \neq l\text{:} && \left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = \left\langle e_j, e_l \right\rangle = 0 = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle \\
&\text{para } i \neq k \text{ y } j = l\text{:} && \left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = 0 = \langle e_k, e_i \rangle = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle \\
&\text{para } i = k \text{ y } j = l\text{:} && \left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = \left\langle e_j, e_l \right\rangle = 1 = \langle e_k, e_i \rangle = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle \\
&\text{para } i \neq k \text{ y } j \neq l\text{:} && \left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = 0 = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle
\end{aligned}$$

Entonces, de las igualdades $\left\langle T_{ij}(e_k), e_l \right\rangle = \left\langle e_k, R_{ij}(e_l) \right\rangle$ se obtiene que $R_{ij}(e_l) = T^*_{ij}(e_l)$ para todo $l = 1, 2, \dots, n$ y, por tanto, $R_{ij} = T^*_{ij}$.

Luego de haber hallado la adjunta T_{ij}^*, definida mediante las igualdades (1.3c), ahora considere las aplicaciones $S_{ij}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, con $i \le j$, dadas por

$$S_{ii} = T_{ii} \ \text{ y } \ S_{ij} = T_{ij} + T_{ji} \ \text{ para } i < j.$$

Observe que $S_{ii}^* = T_{ii}^* = T_{ii} = S_{ii}$ y también para $i < j$, $S_{ij}^* = T_{ij}^* + T_{ji}^* = T_{ji} + T_{ij} = S_{ij}$. Esto muestra que cada S_{ij} es una aplicación lineal simétrica. Pero además de esto, la colección $\{S_{ij}\colon\ i, j = 1, \dots, n,\ i \le j\}$ es una base del espacio $\mathscr{S}$. En efecto, es claro que dicha colección es linealmente independiente. Para mostrar que genera a $\mathscr{S}$ considere un elemento arbitrario $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ en $\mathscr{S}$. Puesto que la colección $\{T_{ij}\colon\ i, j = 1, \dots, n\}$ es base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ entonces existen escalares α_{ij} tales que $T = \sum_{ij} \alpha_{ij} T_{ij}$. Luego $T^* = \sum_{ij} \alpha_{ij} T_{ij}^*$. Evaluando T y T^* en los vectores canónicos e_k se tiene

$$\begin{aligned} T(e_k) &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} T_{ij}(e_k) = \sum_j \alpha_{kj} e_j, \\ T^*(e_k) &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} T_{ij}^*(e_k) = \sum_i \alpha_{ik} e_i. \end{aligned}$$

Siendo T simétrica, la igualdad $T(e_k) = T^*(e_k)$ nos muestra que $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$. Por tanto,

$$\sum_{i,j} \alpha_{ij} T_{ij} = \sum_i \alpha_{ii} T_{ii} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} T_{ij} + \sum_{i>j} \alpha_{ij} T_{ij}$$

y cambiando los índices en la última sumatoria resulta

$$T = \sum_i \alpha_{ii} T_{ii} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} T_{ij} + \sum_{j>i} \alpha_{ji} T_{ji}.$$

Como $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$ entonces

$$T = \sum_i \alpha_{ii} T_{ii} + \sum_{i<j} \alpha_{ij}(T_{ij} + T_{ji}) = \sum_i \alpha_{ii} S_{ii} + \sum_{i<j} \alpha_{ij} S_{ij}.$$

Como la colección $\{S_{ij}\colon\ i, j = 1, \dots, n,\ i \le j\}$ tiene $1 + 2 + \dots + n = n(n+1)/2$ elementos, se concluye que el espacio $\mathscr{T}$ de transformaciones lineales simétricas tiene dimensión $n(n+1)/2$.

2. Respecto al conjunto $\mathscr{A}$ de las transformaciones lineales antisimétricas, hacemos un análisis parecido al del item anterior. La transformación lineal nula es antisimétrica, de manera que $\mathscr{A} \neq \emptyset$. Pero además, si $S, T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son elementos de $\mathscr{A}$ entonces para cada $\alpha \in \mathbb{R}$,
$$(\alpha S + T)^* = \alpha S^* + T^* = \alpha(-S) + (-T) = -(\alpha S + T).$$
Es decir $\alpha S + T \in \mathscr{A}$ y, por tanto, $\mathscr{A}$ es subespacio vectorial de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Considerando nuevamente la colección $\{T_{ij}\}$, definidas como en las igualdades (1.3b), construimos las funciones $A_{ij} = T_{ij} - T_{ji}$ para $i < j$, con $i, j = 1, \dots, n$. Observe que $A_{ij}^* = T_{ij}^* - T_{ji}^* = T_{ji} - T_{ij} = -A_{ij}$, luego cada A_{ij} es antisimétrica. Procediendo como en el item anterior se comprueba que la colección $\{A_{ij}\colon i, j = 1, \dots, n,\ i < j\}$ es base de $\mathscr{A}$. En particular $\mathscr{A}$ es de dimensión $n(n-1)/2$.

3. Adicionalmente podemos ver que si $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es cualquier transformación lineal entonces las transformaciones lineales
$$S = \frac{T + T^*}{2} \quad \text{y} \quad A = \frac{T - T^*}{2}$$

son simétrica y antisimétrica, respectivamente,y además $T = S + A$. Observe que para T, las aplicaciones S y A son únicas, pues tuviéramos $S_1 + A_1 = T = S_2 + A_2$ entonces $S_1 - S_2 = A_2 - A_1$, pero $S_1 - S_2$ es simétrica, mientras que $A_2 - A_1$ es antisimétrica entonces $S_1 - S_2 = A_2 - A_1 = 0$, pues la transformación lineal nula es la única simétrica y antisimétrica a la vez, entonces $S_1 = S_2$ y $T_1 = T_2$. De esto se concluye que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \mathscr{S} \oplus \mathscr{A}$. Esto es, el espacio de transformaciones lineales es la suma directa del espacio de transformaciones simétricas con el espacio de transformaciones antisimétricas. ∎

Caso específico

Para el caso $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3)$ encontraremos bases tanto para el espacio de aplicaciones simétricas y para el de antisimétricas.
Se tienen los conjuntos

$$\mathscr{S} = \left\{A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) : A^* = A\right\}, \qquad \mathscr{A} = \left\{A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R}^3) : A^* = -A\right\}.$$

Tal como se ha hecho en el Ejercicio 2.4, considere las aplicaciones lineales $T_{ij} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tales que para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{aligned}
T_{11}(x) &= x_1 e_1 = (x_1, 0, 0), & T_{21}(x) &= x_2 e_1 = (x_2, 0, 0), & T_{31}(x) &= x_3 e_1 = (x_3, 0, 0),\\
T_{12}(x) &= x_1 e_2 = (0, x_1, 0), & T_{22}(x) &= x_2 e_2 = (0, x_2, 0), & T_{32}(x) &= x_3 e_2 = (0, x_3, 0),\\
T_{13}(x) &= x_1 e_3 = (0, 0, x_1), & T_{23}(x) &= x_2 e_3 = (0, 0, x_2), & T_{33}(x) &= x_3 e_3 = (0, 0, x_3).
\end{aligned}$$

Entonces una base para $\mathscr{S}$ es el conjunto

$$\mathscr{B}_{\mathscr{S}} = \{T_{11}, T_{22}, T_{33}, T_{12} + T_{21}, T_{13} + T_{31}, T_{23} + T_{32}\} \equiv \{S_{11}, S_{22}, S_{33}, S_{12}, S_{13}, S_{23}\}.$$

Observe que $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ tiene $\dfrac{3(3+1)}{2} = 6$ elementos, es decir, la dimensión de $\mathscr{S}$ es 6. Para mostrar que las aplicaciones que conforman $\mathscr{B}_{\mathscr{S}}$ son simétricas, basta calcular la matriz asociada de cada de estas. Denotaremos por M_{ij} a la matriz asociada a S_{ij} entonces

$$M_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad M_{33} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$M_{12} = T_{12} + T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{13} = T_{13} + T_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_{23} = T_{23} + T_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

y como se puede observar, cada una de estas matrices es simétrica.
Respecto al espacio de las antisimétricas, una base está dada por

$$\mathscr{B}_{\mathscr{A}} = \{T_{12} - T_{21}, T_{13} - T_{31}, T_{23} - T_{32}\}.$$

Para comprobar que estas transformaciones lineales son antisimétricas, basta ver sus matrices asociadas las cuales son:

$$T_{12} - T_{21} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{13} - T_{31} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad T_{23} - T_{32} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Es claro que cada una de estas matrices es antisimétrica.