Ejercicio 2.2.

Un conjunto $\{u_1,\dots,u_r\}\subseteq\mathbb{R}^n$ es *ortonormal* cuando $\langle u_j,u_j\rangle=1$ y $\langle u_i,u_j\rangle=0$ para $i\neq j$ cualesquiera. Todo conjunto ortonormal es parte de una base ortonormal. Si $\{u_1,\dots,u_n\}$ es una base ortonormal entonces $x=\sum_{i=1}^n \langle x,u_i\rangle\, u_i$ para todo $x\in\mathbb{R}^n$.

Demostración. En efecto, sea $\mathscr{B}=\{v_1,\dots,v_r\}$ un conjunto ortonormal en $\mathbb{R}^n$, con $r\leq n$. Si $r=n$ tendríamos que $\mathscr{B}$ es un conjunto linealmente independiente con n elementos y, por tanto, es una base de $\mathbb{R}^n$. Si $r<n$ entonces el subespacio generado por $\mathscr{B}$, que denotaremos por $S(\mathscr{B})$, es subespacio propio de $\mathbb{R}^n$. En este caso elegimos un vector no nulo $w\in\mathbb{R}^n$, tal que $w\notin S(\mathscr{B})$, y formamos el vector $v=w-\sum_{i=1}^r\langle w,v_i\rangle\, v_i$. El hecho que $w\notin S(\mathscr{B})$ garantiza que w es distinto de cualquier combinación lineal del tipo $\sum_{i=1}^r c_i v_i$, y en particular $v\neq 0$. Entonces resulta que para todo $j=1,\dots,r$,

$$\langle v,v_j\rangle=\left\langle w-\sum_{i=1}^r\langle w,v_i\rangle\, v_i, v_j\right\rangle=\langle w,v_j\rangle-\langle w,v_j\rangle=0.$$

Es decir, v es ortogonal a todos los vectores $v_1,\dots,v_r$. Considerando $v_{r+1}=\dfrac{v}{\sqrt{\langle v,v\rangle}}$ construimos el conjunto $\{v_1,\dots,v_{r+1}\}$, el cual es ortonormal y $\{v_1,\dots,v_r\}\subseteq\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$. Si $r+1=n$ el proceso termina, de lo contrario volvemos a repetir el procedimiento anterior, pero ahora con el conjunto $\{v_1,\dots,v_r,v_{r+1}\}$. Continuando de esta manera extendemos $\mathscr{B}$ a una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$.
Por otro lado si $\{u_1,\dots,u_n\}$ es una base ortonormal y $x\in\mathbb{R}^n$ entonces existen escalares $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathbb{R}$ tales que $x=\sum\limits_{i=1}^n\alpha_i u_i$. Debido a la ortonormalidad de los u_i resulta

$$\langle x,u_j\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\alpha_i u_i,u_j\right\rangle=\sum_{i=1}^n\alpha_i\langle u_i,u_j\rangle=\alpha_j.$$

Luego $x=\sum\limits_{i=1}^n\langle x,u_i\rangle\, u_i$. ∎

Caso específico

Como caso específico del Ejercicio 2.2 en $\mathbb{R}^4$ con el producto interno canónico, considere el conjunto ortonormal $\mathscr{B}=\{v_1,v_2\}$, donde

$$v_1=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \text{y}\ v_2=\left(0,\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}},0\right).$$

Tal como se procedió en la demostración del Ejercicio 2.2, escogemos un vector w que no esté en el espacio generado por $\mathscr{B}$. Por ejemplo, puede ser el vector $w=(0,1,0,0)$. En efecto, si por el contrario se tuviera que $w\in S(\mathscr{B})$ entonces existirían escalares $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ tales que $w=\alpha v_1+\beta v_2$ lo cual nos lleva al sistema

$$0=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\qquad 1=\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$0=-\beta\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\qquad\qquad 0=\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

que no tiene consistencia. A continuación construimos el vector

$$v = w - \langle w, v_1 \rangle v_1 - \langle w, v_2 \rangle v_2.$$

Reemplazando las coordenadas de v_1, v_2 y de w, y haciendo los cálculos correspondientes se obtiene $v = (0, 1/2, 1/2, 0)$. Ahora definimos $v_3 = \dfrac{v}{\|v\|} = \left(0, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$. Ahora formamos el conjunto ortonormal $\mathscr{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$, y escogemos un vector w que no esté en el espacio generado por $\mathscr{B}_1$. Por ejemplo, puede ser el vector $w = (0, 0, 0, 1)$. Afirmamos que w no es generado por los vectores de $\mathscr{B}_1$, porque de lo contrario existirían escalares α, β y γ tales que

$$(0, 0, 0, 1) = \alpha v_1 + \beta v_2 + \gamma v_3$$

lo cual nos lleva a las igualdades

$$0 = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 0 = \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$0 = \beta \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - \gamma \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad 1 = \alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{2}},$$

las mismas que forman un sistema no consistente. Por tanto, w no pertenece al subespacio generado por $\mathscr{B}_1$. Siguiendo el procedimiento anterior, ahora formamos el vector $v = w - \langle w, v_1 \rangle v_1 - \langle w, v_2 \rangle v_2 - \langle w, v_3 \rangle v_3$. Reemplazando las coordenadas respectivas y haciendo cálculos se obtiene $v = (1/2, 0, 0, -1/2)$. Considerando $v_4 = \dfrac{v}{\|v\|} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Finalmente, la base ortonormal para $\mathbb{R}^4$ está dada por el conjunto

$$\mathscr{B}_2 = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \right\}.$$

el cual contiene al conjunto ortonormal $\mathscr{B}$, originalmente dado.