Ejercicio 2.16.

A fin de que $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sea una semejanza, es necesario y suficiente que exista $\alpha > 0$ tal que $(1/\alpha)A$ sea ortogonal.

Demostración. Suponga en primer lugar $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ es una semejanza. Entonces de acuerdo al item (1) del Ejercicio 2.15, existe algún escalar $\alpha > 0$ tal que $\|Ax\| = \alpha\,\|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Pero esto implica que $(1/\alpha)A$ es tal que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|(1/\alpha)Ax\| = \left|\frac{1}{\alpha}\right| \|Ax\| = \frac{1}{\alpha}\alpha\,\|x\| = \|x\|\,,$$

es decir, $\|(1/\alpha)Ax\| = \|x\|$. De acuerdo al Ejercicio 2.5, item (1), la aplicación $(1/\alpha)A$ es ortogonal.

Recíprocamente, suponga que existe $\alpha > 0$ tal que $(1/\alpha)A$ es ortogonal. Entonces para todo $x \in \mathbb{R}^n$, se tiene que $\|(1/\alpha)Ax\| = \|x\|$. Luego $\|Ax\| = \alpha\,\|x\|$. Es decir, de acuerdo al ítem (2) del Ejercicio 2.15, A es una semejanza. ∎