Ejercicio 2.15.

Pruebe que las siguientes afirmaciones al respecto de una aplicación lineal $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ son equivalentes:

1. Existe $\alpha > 0$ tal que $\langle Ax, Ay\rangle = \alpha^2 \langle x, y\rangle$, cualesquiera sean $x, y \in \mathbb{R}^n$;
2. $\|Ax\| = \alpha \|x\|$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (α constante);
3. Si $(e_1, \dots, e_n)$ es una base ortonormal, entonces $\langle Ae_i, Ae_j\rangle = 0$ para $i \neq j$ y $\|Ae_i\| = \alpha$ para cualesquiera $i, j = 1, \dots, n$.

Cuando esto ocurre, A se llama una *semejanza.*

Demostración. Suponga que existe un número real $\alpha > 0$ tal que $\langle Ax, Ay\rangle = \alpha^2 \langle x, y\rangle$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$. En particular, para $x = y$,

$$\|Ax\|^2 = \langle Ax, Ax\rangle = \alpha^2 \langle x, x\rangle = \alpha^2 \|x\|^2 .$$

Luego (1) implica (2).
Suponga que se cumple (2) y sea $(e_1, \dots, e_n)$ una base ortonormal. Entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ae_i, Ae_j\rangle &= \frac{1}{4}\left(\|Ae_i + Ae_j\|^2 - \|Ae_i - Ae_j\|^2\right)\\
&= \frac{1}{4}\left(\|A(e_i + e_j)\|^2 - \|A(e_i - e_j)\|^2\right)\\
&= \frac{\alpha^2}{4}\left(\|e_i + e_j\|^2 - \|e_i - e_j\|^2\right)\\
&= \frac{\alpha^2}{4}\left(4\langle e_i, e_j\rangle\right)\\
&= \alpha^2 \langle e_i, e_j\rangle .
\end{aligned}$$

Usando la ortonormalidad de los vectores e_i se obtiene lo que afirma (3).
Finalmente, suponga que se cumple (3) y considere x e y elementos arbitrarios en $\mathbb{R}^n$. En términos de la base ortonormal $(e_1, \dots, e_n)$, si $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ e $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$, entonces

$$\begin{aligned}
\langle Ax, Ay\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n x_i Ae_i, \sum_{j=1}^n y_j Ae_j \right\rangle &= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \langle Ae_i, Ae_j\rangle\\
&= \sum_{i=1}^n x_i y_i \|Ae_i\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i y_i \alpha^2\\
&= \sum_{i,j=1}^n x_i y_j \alpha^2 \langle e_i, e_j\rangle = \alpha^2 \langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

Y así, (3) implica (1). ∎