Ejercicio 2.14.

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial, $(e_1, \dots, e_k)$ una base ortonormal de E y $a \in \mathbb{R}^n$ un vector arbitrario. Poniendo $a_0 = \langle a, e_1 \rangle e_1 + \cdots + \langle a, e_k \rangle e_k$, el vector $a - a_0$ es perpendicular a todos los vectores de E, y $\|a - a_0\| \le \|a - y\|$ para todo $y \in E$. La función $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(y) = \|a - y\|$, alcanza su valor mínimo en un único punto de E, a saber, el punto a_0. De ahí resulta que a_0 depende solamente de a, mas no de la base ortonormal escogida en E. La aplicación $\pi\colon \mathbb{R}^n \to E$ dada por $\pi(a) = a_0$, es lineal, su núcleo es $E^\perp$ y todo vector $z \in \mathbb{R}^n$ se escribe, de modo único, como $z = x + y$, con $x \in E$ e $y \in E^\perp$, luego $\mathbb{R}^n = E \oplus E^\perp$.

Demostración. Dado que este ejercicio consta de varias interrogantes, iremos resolviendo por partes.

1. En primer lugar mostraremos que $a - a_0$ es perpendicular a todos los vectores de E. Para cada elemento e_j de la base ortonormal dada, se tiene

$$\begin{aligned}\langle a - a_0, e_j \rangle &= \langle a, e_j \rangle - \langle a_0, e_j \rangle = \langle a, e_j \rangle - \left\langle \sum_{i=1}^{k} \langle a, e_i \rangle e_i, e_j \right\rangle \\ &= \langle a, e_j \rangle - \sum_{i=1}^{k} \langle a, e_i \rangle \langle e_i, e_j \rangle = \langle a, e_j \rangle - \langle a, e_j \rangle = 0.\end{aligned}$$

   Luego dado cualquier $v = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j e_j$, vector en E,

$$\langle a - a_0, v \rangle = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \langle a - a_0, e_j \rangle = 0.$$

   Esto muestra que $a - a_0$ es perpendicular a todos los vectores $v \in E$. Observe que este resultado es válido para cualquiera que sea la base ortonormal considerada.

2. A continuación mostramos que se cumple la desigualdad $\|a - a_0\| \le \|a - y\|$, para todo $y \in E$. En efecto, como $a_0 \in E$ y E es subespacio vectorial entonces para todo $y \in E$ se tiene que $y - a_0 \in E$, luego del ítem anterior se cumple que $\langle a - a_0, y - a_0 \rangle = 0$. Entonces

$$0 = \langle a - a_0, y - a_0 \rangle = \langle a - a_0, y - a + a - a_0 \rangle = \langle a - a_0, y - a \rangle + \|a - a_0\|^2.$$

   De aquí resulta que $\|a - a_0\|^2 = \langle a - a_0, a - y \rangle \le \|a - a_0\| \, \|a - y\|$ y, por tanto,

$$\|a - a_0\| \le \|a - y\|$$

   para todo $y \in E$.

3. Sea $a \in \mathbb{R}^n$ y la función $\varphi\colon E \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(y) = \|a - y\|$. Del item (1) sabemos que para todo $y \in E$ se tiene $\|a - a_0\| \le \|a - y\|$, lo cual quiere decir que $\varphi(a_0) \le \varphi(y)$, para todo $y \in E$. Esto nos dice que φ tiene un valor mínimo en $a_0 \in E$. Siendo E convexo, entonces del Ejercicio 2.11 deducimos que a_0 es el único punto en E en el cual φ asume este valor mínimo.

   Observe que la regla de correspondencia de φ depende de a, es decir, si cambiamos de a se tiene una nueva función φ. Además en el ítem (1) observamos que la propiedad sobre $a - a_0$ no depende de la base ortonormal considerada. Por tanto se concluye que a_0, punto donde φ alcanza su mínimo valor, solo depende de a.

4. Ahora considere la función $\pi\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ dada por $\pi(a) = a_0 = \sum_{i=1}^{k} \langle a, e_i \rangle e_i$. Es sencillo mostrar que π es lineal. Además si $a \in \ker(\pi)$ entonces $\pi(a) = 0$, es decir, $\sum_{i=1}^{k} \langle a, e_i \rangle e_i = 0$. Debido a la independencia lineal de los vectores e_i, la última igualdad implica que $\langle a, e_i \rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$, luego a es ortogonal al espacio E, es decir, $a \in E^{\perp}$. Eso muestra que $\ker(\pi) \subseteq E^{\perp}$. Recíprocamente, si $a \in E^{\perp}$ entonces, en particular, $\langle a, e_j \rangle = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$. De la definición de π resulta $\pi(a) = 0$ y, por tanto, a debe ser elemento del $\ker(\pi)$. Luego $E^{\perp} \subseteq \ker(\pi)$. En conclusión, esto muestra que $\ker(\pi) = E^{\perp}$.

5. Finalmente, como $E \cap E^{\perp} = \{0\}$ entonces sólo queda mostrar la igualdad $\mathbb{R}^n = E + E^{\perp}$. Para ello será suficiente probar que $\mathbb{R}^n \subseteq E + E^{\perp}$. Dado cualquier $a \in \mathbb{R}^n$, de lo demostrado en los items (1) y (3) deducimos que el vector $a_0 = \pi(a)$ es el único elemento de E tal que $a - \pi(a)$ es ortogonal a E, es decir, tal que $a - \pi(a) \in E^{\perp}$. Si $y = a - \pi(a)$ y $x = \pi(a)$, deducimos que $a = x + y$. Esto muestra que cada $a \in \mathbb{R}^n$ se escribe de modo único como la suma de dos elementos: uno x en E y otro y en $E^{\perp}$, luego $\mathbb{R}^n \subseteq E + E^{\perp}$. ∎