Ejercicio 2.13.

Dado un conjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$, su *complemento ortogonal* es el conjunto $X^\perp = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } x \in X\}$. $X^\perp$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$. Si $E \subseteq \mathbb{R}^n$ es un subespacio vectorial entonces $E^{\perp\perp} = E$.

Demostración. Como $\langle x, 0\rangle = 0$ para todo $x \in X$ entonces $0 \in X^\perp$, luego $X^\perp \neq \emptyset$. Por otro lado, si $y, z \in X^\perp$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces para todo $x \in X$,

$$\langle x, \alpha y + z \rangle = \alpha \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle = 0 + 0 = 0,$$

lo cual muestra que $\alpha y + z \in X^\perp$ y, por tanto, $X^\perp$ es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.
Sea E un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

1. Demostraremos en primer lugar que $\dim E^\perp = n - \dim E$.

   Elija una base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de E y elija vectores $v_1, \ldots, v_m \in \mathbb{R}^n$ tales que el conjunto $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_k, v_1, \ldots, v_m\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ (luego $k + m = n$). Considere en $(\mathbb{R}^n)^*$ la base $\mathscr{B}^* = \{f_1, \ldots, f_k, g_1, \ldots, g_m\}$, dual de $\mathscr{B}$. De acuerdo al Ejercicio 2.1, para cada g_i existe un único $w_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $g_i(x) = \langle w_i, x\rangle$, para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Afirmamos que $\{w_1, \ldots, w_m\}$ es base de $E^\perp$. Observe que $\langle w_i, u_j \rangle = g_i(u_j) = 0$ para todo $j = 1, \ldots, k$, es decir, cada w_i es ortogonal a todo elemento de la base de E y, por tanto, ortogonal a todo E. Luego cada vector w_i es elemento de $E^\perp$. Los vectores $w_1, \ldots, w_m$ son linealmente independientes pues si consideramos la combinación lineal

   $$\beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_m w_m = 0$$

   entonces, para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

   $$\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i(x) = \sum_{i=1}^{k} \beta_i \langle w_i, x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{m} \beta_i w_i, x \right\rangle = \langle 0, x\rangle = 0,$$

   luego $\sum_{i=1}^{m} \beta_i g_i = 0$, y como los funcionales g_i forman un conjunto linealmente independiente entonces cada $\beta_i = 0$.

   Pero además los vectores $w_1, \ldots, w_m$ generan a $E^\perp$. Para sustentar esta afirmación considere un vector no nulo $w \in E^\perp$. Entonces el funcional $g = \langle w, \cdot\rangle$ puede escribirse en la forma

   $$g = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i + \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j.$$

   Entonces para todo vector u_l en la base de E,

   $$0 = \langle w, u_l\rangle = g(u_l) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(u_l) + \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j(u_l) = \alpha_l$$

   luego $g = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j$. Esto a su vez implica que para todo $x \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle w, x\rangle = g(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j g_j(x) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \langle w_j, x\rangle = \left\langle \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j, x \right\rangle$$

   de donde $w = \sum_{j=1}^{m} \beta_j w_j$.

   Entonces siendo $\{w_1, \ldots, w_m\}$ base de $E^\perp$ y además $k + m = n$ entonces el espacio $E^\perp$ es de dimensión $m = n - k$. Es decir $\dim E^\perp = n - \dim E$.

2. Ahora procedemos a demostrar la igualdad $E^{\perp\perp} = E$.

   En primer lugar mostraremos que $E^{\perp\perp} \subseteq E$. Sea $x \in E^{\perp\perp}$ y suponga que $x \notin E$. Siendo que $x \in E^{\perp\perp}$ entonces $\langle x, u\rangle = 0$ para todo $u \in E^{\perp}$. Esto significa que cada elemento $u \in E^{\perp}$ es ortogonal a todo E y a x, es decir, al subespacio $W = \mathscr{S}(E \cup \{x\})$ (subespacio generado por $E \cup \{x\}$), luego $E^{\perp} \subseteq W^{\perp}$. Pero como $E \subseteq W$ entonces $W^{\perp} \subseteq E^{\perp}$, luego debe ser $E^{\perp} = W^{\perp}$. De esto y del item (1) se tiene que $n - \dim E = n - \dim W$, luego $\dim E = \dim W$. Como E es un espacio contenido en W y ambos tienen la misma dimensión entonces $E = W$; en particular $x \in E$, lo cual es una contradicción. Luego debe ser $E^{\perp\perp} \subseteq E$.

   Recíprocamente, si $x \in E$ entonces x es ortogonal a todo elemento de $E^{\perp}$. Pero nuevamente por definición, si x es ortogonal a $E^{\perp}$ entonces $x \in E^{\perp\perp}$. Luego $E \subseteq E^{\perp\perp}$. ∎