Ejercicio 2.12.

Fije números reales α y β con $\alpha < \beta$. Para cada $x = (x_1, \ldots, x_n)$ en $\mathbb{R}^n$, con $n \geq 2$, ponga

$$\|x\| = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right|.$$

Pruebe que esto define una norma en $\mathbb{R}^n$, la cual no proviene de un producto interno.

Demostración. En primer lugar observe que para cada elemento $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, la función $f_x \colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f_x(t) = \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| \quad (\geq 0)$$

es continua (todo polinomio es continuo y la función $t \mapsto |t|$ también lo es). Como además de esto el conjunto $[\alpha, \beta]$ es compacto entonces $f_x([\alpha, \beta])$ es compacto; en particular el conjunto

$$\left\{ \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| : \ t \in [\alpha, \beta] \right\}$$

es acotado. De esto, y de la completitud de los números reales, se deduce que

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| \in \mathbb{R},$$

es decir, $\|x\| \in \mathbb{R}$.
En segundo lugar comprobaremos que la función $x \mapsto \|x\|$ define una norma en $\mathbb{R}^n$.

a) Sean $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Entonces

$$\begin{aligned}
\|x + y\| &= \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) t + \cdots + (x_n + y_n) t^{n-1} \right| \\
&\leq \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left\{ \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| + \left| y_1 + y_2 t + \cdots + y_n t^{n-1} \right| \right\} \\
&= \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| + \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| y_1 + y_2 t + \cdots + y_n t^{n-1} \right| \\
&= \|x\| + \|y\|.
\end{aligned}$$

Observe que la penúltima igualdad es válida debido a que los conjuntos

$$\left\{ \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| : \ t \in [\alpha, \beta] \right\} \text{ y } \left\{ \left| y_1 + y_2 t + \cdots + y_n t^{n-1} \right| : \ t \in [\alpha, \beta] \right\}$$

son acotados. Por tanto, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

b) Para cada $c \in \mathbb{R}$,

$$\|cx\| = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| cx_1 + cx_2 t + \cdots + cx_n t^{n-1} \right| = \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |c| \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right|.$$

Como $|c| \geq 0$ entonces

$$\sup_{\alpha \leq t \leq \beta} |c| \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right| = |c| \sup_{\alpha \leq t \leq \beta} \left| x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} \right|$$

Por tanto, se concluye que $\|cx\| = |c| \, \|x\|$.

c) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $\|x\| = 0$ entonces

$$\sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}\right| = 0.$$

Como

$$0 \le \left|x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}\right| \le \sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}\right| = 0$$

entonces $\left|x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1}\right| = 0$ es decir, para todo $t \in [\alpha, \beta]$, se tiene igualdad $x_1 + x_2 t + \cdots + x_n t^{n-1} = 0$, de donde resulta $x_1 = \cdots = x_n = 0$ y, por tanto, $x = 0$. Recíprocamente, es claro que si $x = 0$ entonces $\|x\| = 0$.

Los ítems (a), (b) y (c) muestran que $x \mapsto \|x\|$ es una norma.
Finalmente mostraremos que esta norma no proviene de ningún producto interno. Para ello considere los vectores

$$x = (-\alpha, 1, 0, \ldots, 0) \quad \text{y} \quad y = (-\beta, 1, 0, \ldots, 0), \tag{1.10}$$

con $\alpha \neq \beta$. Entonces

$$x + y = \left(-\alpha - \beta, 2, 0, \ldots, 0\right) \quad \text{y} \quad x - y = (\beta - \alpha, 0, 0, \ldots, 0).$$

Puesto que $\alpha \le t \le \beta$ entonces $0 \le t - \alpha \le \beta - \alpha$ y $\alpha - \beta \le t - \beta \le 0$. Por tanto,

$$\|x\| = \sup_{\alpha\le t\le\beta} |-\alpha + t| = \beta - \alpha \quad \text{y} \quad \|y\| = \sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|-\beta + t\right| = \beta - \alpha.$$

Además de esto, siendo $2\alpha \le 2t \le 2\beta$ entonces al sumar $-\alpha - \beta$ en estas desigualdades se obtiene $\alpha - \beta \le -\alpha - \beta + 2t \le \beta - \alpha$. Como esto es válido para cada $t \in [\alpha, \beta]$ resulta

$$\|x + y\| = \sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|-\alpha - \beta + 2t + 0t^2 + \cdots + 0t^{n-1}\right| = \beta - \alpha.$$

Análogamente, siendo $\beta - \alpha \ge 0$, se tiene

$$\|x - y\| = \sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|(\beta - \alpha) + 0t + \cdots + 0t^{n-1}\right| = \sup_{\alpha\le t\le\beta} \left|\beta - \alpha\right| = \left|\beta - \alpha\right| = \beta - \alpha.$$

Por tanto, para los vectores dados en (1.10):

$$2(\|x\|^2 + \|y\|^2) = 4(\beta - \alpha)^2$$

mientras que

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\beta - \alpha)^2.$$

Obviamente no se cumple la identidad del paralelogramo y, por tanto, la norma no proviene de un producto interno. ∎

Caso específico.

En el Ejercicio 2.12, considere por ejemplo $\alpha = 0$, $\beta = 1$ entonces en $\mathbb{R}^3$ se tiene la norma

$$\|x\| = \sup_{0\le t\le 1} \left|x_1 + x_2 t + x_3 t^2\right|$$

para cada $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. A continuación calculamos la norma para algunos vectores específicos.

1. Para vectores del tipo $x = (x_1, x_2, 0)$, se tiene la igualdad $\left|x_1 + x_2 t + 0 \cdot t^2\right| = |x_1 + x_2 t|$. Observe que $|x_1 + x_2 t| = 0$ si, y solo si, $t = -\dfrac{x_1}{x_2}$ (suponemos $x_2 \neq 0$). Luego pueden ocurrir las siguientes posibilidades:

   a) Si $0 \leq -\dfrac{x_1}{x_2} < \dfrac{1}{2}$ entonces

   $$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_1 + x_2 t| = |x_1 + x_2|.$$

   Este caso se ilustra en la Figura 1.4 (líneas de color azul).

   b) Si $\dfrac{1}{2} \leq -\dfrac{x_1}{x_2} \leq 1$ entonces

   $$\|x\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} |x_1 + x_2 t| = |x_1|.$$

   Usted puede hacer una representación de este caso, similar a la mostrada en la Figura 1.4. Observe las líneas de color rojo.

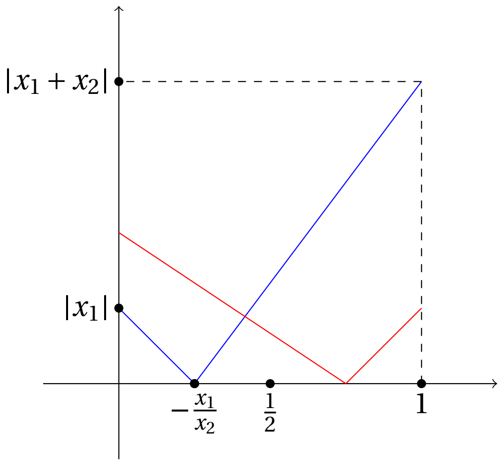

Figura 1.4

2. Si $x = (1, -2, 1)$ entonces

$$\left|x_1 + x_2 t + x_3 t^2\right| = \left|1 - 2t + t^2\right| = (t-1)^2,$$

luego $\|(1, -2, 1)\| = \sup_{0 \leq t \leq 1} (t-1)^2 = 1.$

Y así se puede calcular la norma de cada $x \in \mathbb{R}^3$.