Ejercicio 2.11.

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto convexo. Fijado $p \in \mathbb{R}^n$, sea $\varphi\colon C \to \mathbb{R}$ la función definida por

$$\varphi(x) = \left\|x - p\right\| = \sqrt{\langle x - p, x - p\rangle}.$$

Existe como máximo un punto $a \in C$ tal que $\varphi(a) = \text{ínf}\{\varphi(x)\colon\ x \in C\}$.

Demostración. Suponga que existen puntos $a, b \in C$ tales que $\varphi(a) = \varphi(b)$. Como la norma considerada proviene de un producto interno entonces, por la identidad del paralelogramo[1], se tiene

$$\begin{aligned}\|a - b\|^2 &= \left\|(a-p) - (b-p)\right\|^2 \\ &= 2\left\|a - p\right\|^2 + 2\left\|b - p\right\|^2 - \left\|(a-p) + (b-p)\right\|^2 \\ &= 2\left\|a - p\right\|^2 + 2\left\|b - p\right\|^2 - 4\left\|\frac{1}{2}(a+b) - p\right\|^2.\end{aligned}$$

Como C es convexo y $a, b \in C$ entonces $\frac{1}{2}(a+b) \in C$. Siendo $\varphi(a) \le \varphi(x) = \left\|x - p\right\|$ para todo $x \in C$ entonces en particular $\varphi(a) \le \varphi\left(\frac{1}{2}(a+b)\right) = \left\|\frac{1}{2}(a+b) - p\right\|$ y, por tanto, de las igualdades anteriores se obtiene

$$0 \le \|a - b\|^2 \le 2\varphi(a) + 2\varphi(b) - 4\varphi(a) = 0.$$

Luego $a = b$. ∎

Observación

En el Ejercicio 2.11, si C es no convexo podrían existir infinitos puntos $a \in C$ tales que $\varphi(a) = \text{ínf}\{\varphi(x)\,:\ x \in C\}$. Por ejemplo, en $\mathbb{R}^n$ provisto de la norma euclidiana, considere la esfera $C = \{x \in \mathbb{R}^n\colon\ \|x\| = 1\}$ y el punto fijo $p = (0, \dots, 0)$ (Fig. 1.3). Se tiene que C es *no convexo*, pues no contiene segmentos de recta (ver Ejercicio 2.10), y para todo $x \in C$,

$$\varphi(x) = \left\|x - p\right\| = 1$$

luego

$$\begin{aligned}\text{ínf}\{\varphi(x)\colon x \in C\} &= \text{ínf}\{1\colon x \in C\} \\ &= 1 \\ &= \varphi(a)\end{aligned}$$

para todo $a \in C$

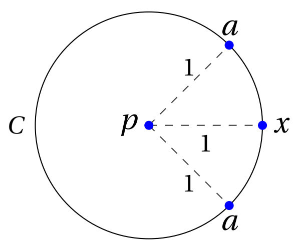

Figura 1.3: C es no convexo y existen infinitos $a \in C$ tal que $\varphi(a) = \text{ínf}\{\varphi(x)\colon x \in C\}$

[1] *Identidad del paralelogramo:* Si una norma $\|\cdot\|$ en $\mathbb{R}^n$ proviene de un producto interno entonces para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$ vale la igualdad $\left\|x + y\right\|^2 + \left\|x - y\right\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$.