Ejercicio 2.10.

Si una norma proviene de un producto interno y $a \neq b$ en $\mathbb{R}^n$ son tales que $\|a\| \leq r$ y $\|b\| \leq r$ entonces $\|(1-t)a+tb\| < r$ para todo $t \in]0,1[$. (En particular la esfera no contiene segmentos de recta.)

Demostración. Es claro que por ser $\|a\| \leq r$ y $\|b\| \leq r$ entonces para todo $t \in [0,1]$,

$$\|(1-t)a+tb\| \leq (1-t)\|a\| + t\|b\| \leq (1-t)r + tr = r$$

es decir, $\|(1-t)a+tb\| \leq r$. Para descartar la igualdad $\|(1-t)a+tb\| = r$, cuando $0<t<1$, considere la función $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(t) = \|(1-t)a+tb\|^2$$

entonces, puesto que la norma proviene de un producto interno,

$$f(t) = \|(b-a)t+a\|^2 = \|b-a\|^2 t^2 + 2\langle b-a, a\rangle t + \|a\|^2.$$

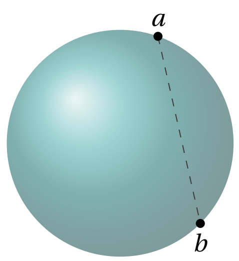
Como $a \neq b$ entonces $\|b-a\|^2 > 0$. Esto implica que f es una función cuya gráfica es una parábola que se abre hacia arriba, por tanto, f restringida al intervalo $[0,1]$ alcanza su valor máximo en uno o ambos de los extremos del intervalo $[0,1]$. Por tanto, para todo $0<t<1$, $f(t) < \text{máx}\{f(0), f(1)\}$. Pero $f(0) = \|a\|^2 \leq r^2$ y $f(1) = \|b\|^2 \leq r^2$ entonces, para todo $0<t<1$,

$$\|(1-t)a+tb\|^2 < r^2$$

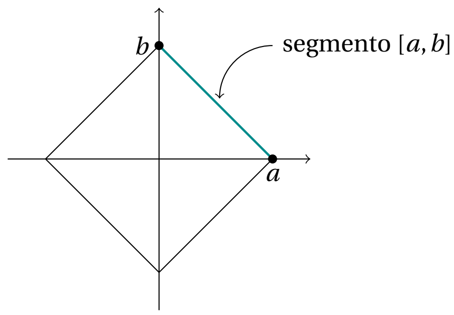
de donde se obtiene lo planteado en el ejercicio.
En particular observe que en el caso de ser $\|a\| = r = \|b\|$, es decir a y b pertenecen a la esfera de centro el origen de $\mathbb{R}^n$ y radio r, también se tiene $\|(1-t)a+tb\| < r$, para todo $0<t<1$. Lo cual significa que $(1-t)a+tb$ no pertenece a dicha esfera, para todo $0<t<1$. Es decir, la esfera no contiene segmentos de recta (Fig. 1.2.a).
Observe que esto último no necesariamente es cierto si la norma no proviene de un producto interno (Fig. 1.2.b). Por ejemplo, si en $\mathbb{R}^2$ consideramos la norma de la suma y los puntos $a=(1,0)$, $b=(0,1)$ entonces a y b están en la esfera unitaria (circunferencia) pero además para todo $0<t<1$,

$$\|(1-t)a+tb\| = \|(1-t,t)\| = |1-t|+|t| = 1-t+t = 1,$$

es decir, todo el segmento $(1-t)a+tb$ está contenido en dicha esfera.



(a): La esfera no contiene segmentos de recta (si la norma proviene de un producto interno)



(b): La esfera podría contener segmentos de recta (si la norma *no* proviene de un producto interno)

Figura 1.2: Esferas en diferentes normas

∎