2 Producto interno y norma

Ejercicio 2.1.

Para todo funcional $f \in (\mathbb{R}^n)^*$ existe un único vector $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $f(x) = \langle y, x\rangle$ para cualquiera que sea $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración. En este ejercicio se considera un producto interno cualquiera, denotado por $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Sea $\{e_1, \ldots, e_n\}$ la base canónica del $\mathbb{R}^n$.
Dado el funcional lineal $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, considere el sistema de ecuaciones

$$\langle e_i, e_1\rangle\, y_1 + \langle e_i, e_2\rangle\, y_2 + \cdots + \langle e_i, e_n\rangle\, y_n = f(e_i),\ \ i = 1, \ldots, n, \tag{1.7}$$

donde las incógnitas son $y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_n$. Considerando las matrices

$$A = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_1\rangle & \langle e_1, e_2\rangle & \cdots & \langle e_1, e_n\rangle \\ \langle e_2, e_1\rangle & \langle e_2, e_2\rangle & \cdots & \langle e_2, e_n\rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle e_n, e_1\rangle & \langle e_n, e_2\rangle & \cdots & \langle e_n, e_n\rangle \end{bmatrix},\quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix},\ \text{y}\ \ F = \begin{bmatrix} f(e_1) \\ f(e_2) \\ \vdots \\ f(e_n) \end{bmatrix}$$

entonces el sistema (1.7) se puede escribir como $A \cdot Y = F$.
Afirmamos que las columnas de la matriz A forman un conjunto linealmente independiente. En efecto, si cada columna la denotamos como

$$C_j = \begin{bmatrix} \langle e_1, e_j\rangle \\ \langle e_2, e_j\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, e_j\rangle \end{bmatrix},\ \text{donde } j = 1, \ldots, n,$$

entonces al formar la combinación lineal nula

$$\alpha_1 C_1 + \alpha_2 C_2 + \cdots + \alpha_n C_n = 0,$$

y hacer las operaciones correspondientes, resulta

$$\begin{bmatrix} \langle e_1, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\rangle \\ \langle e_2, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\rangle \\ \vdots \\ \langle e_n, \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Si $\omega := \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n$ entonces la anterior igualdad matricial nos dice que $\langle e_i, \omega\rangle = 0$ para todo $i = 1, \ldots, n$. De aquí resulta que $\omega = 0$, es decir, $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \cdots + \alpha_n e_n = 0$. La independencia lineal de los vectores $e_1, \ldots, e_n$ implica que $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$.
Pero si las columnas de A son linealmente independientes, entonces dicha matriz tiene inversa, luego el sistema $A \cdot Y = F$ tiene una única solución $Y \in \mathbb{R}^n$, dada por

$$Y = A^{-1} F.$$

Si $(y_1,\ldots,y_n)$ son las coordenadas de esta solución Y, entonces estas satisfacen el sistema (1.7). Por tanto, para todo $x=\sum_{i=1}^n x_i e_i$,

$$\begin{aligned}\langle Y,x\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^n y_j e_j, \sum_{i=1}^n x_i e_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n x_i \left\langle \sum_{j=1}^n y_j e_j, e_i \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \left(\sum_{j=1}^n y_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle \right) = \sum_{i=1}^n x_i f(e_i) \\ &= f\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i \right) = f(x).\end{aligned}$$

Tal como se enuncia en el ejercicio.
Observe que en el caso de ser $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el *producto interno canónico* en $\mathbb{R}^n$, el sistema (1.7) tiene como solución única al vector $Y=(f(e_1),\ldots,f(e_n))$. ∎

Caso específico

Como caso específico del Ejercicio 2.1, considere sobre $\mathbb{R}^3$ el producto interno dado por

$$\left\langle x,y\right\rangle := (2x_1+x_3)y_1+(3x_2+x_3)y_2+(x_1+x_2+4x_3)y_3,$$

donde $x=(x_1,x_2,x_3)$ y $y=(y_1,y_2,y_3)$ (observe que este producto *no es el canónico*). Considere también el funcional lineal $f\colon\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definido como $f(x_1,x_2,x_3)=x_1-2x_2-x_3$. Según el Ejercicio 2.1, existe un único vector $y\in\mathbb{R}^3$ tal que $f(x)=\left\langle y,x\right\rangle$, para todo $x\in\mathbb{R}^3$. Para esto debemos resolver el sistema

$$\langle e_i,e_1\rangle\, y_1+\langle e_i,e_2\rangle\, y_2+\langle e_i,e_3\rangle\, y_3=f(e_i),\ i=1,2,3.$$

Como $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ y $e_3=(0,0,1)$, entonces se tiene

$$\begin{aligned}2\cdot y_1+0\cdot y_2+1\cdot y_3&=1\\ 0\cdot y_1+3\cdot y_2+1\cdot y_3&=-2\\ 1\cdot y_1+1\cdot y_2+4\cdot y_3&=-1\end{aligned}$$

y la solución de este sistema es el vector $(y_1,y_2,y_3)=\left(\frac{12}{19},\frac{-11}{19},\frac{-5}{19}\right)$. Entonces para todo $x=(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$,

$$\left\langle x,y\right\rangle=(2x_1+x_3)\frac{12}{19}-(3x_2+x_3)\frac{11}{19}-(x_1+x_2+4x_3)\frac{5}{19}=x_1-2x_2-x_3=f(x),$$

tal cual ocurre en el Ejercicio 2.1.