Ejercicio 1.4.

Sea $E \subset \mathbb{R}^n$ un subespacio vectorial de dimensión m. Pruebe que existen $n-m$ funcionales lineales $f_1, f_2, \ldots, f_{n-m}\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tales que

$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0\right\}.$$

Concluya que existe una aplicación lineal sobreyectiva $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $E = A^{-1}(0)$.

Demostración. Sea $\mathscr{B}_E = \{u_1, \ldots, u_m\}$ una base del subespacio vectorial E. En particular $\mathscr{B}_E$ es un subconjunto linealmente independiente en $\mathbb{R}^n$ y, por tanto, puede ser extendido a una base $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.
Considere los funcionales lineales $g_1, \ldots, g_n\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ con la condición que el conjunto $\{g_1, \ldots, g_n\}$ sea base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$, y a su vez dual de $\mathscr{B}$, es decir,

$$g_i(u_j) = \begin{cases} 0\,, & \text{si } i \neq j \\ 1\,, & \text{si } i = j. \end{cases} \tag{1.6}$$

A partir de esto considere los funcionales $f_1 = g_{m+1}$, $f_2 = g_{m+2}$, $\ldots$, $f_{n-m} = g_n$, y considere también el conjunto $H := \left\{x \in \mathbb{R}^n \colon f_1(x) = f_2(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0\right\}$. Debemos demostrar que $E = H$.
Si $x \in E$ entonces, por ser $\{u_1, \ldots, u_m\}$ base de E, existen escalares reales $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tales que $x = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m$. Luego

$$f_1(x) = g_{m+1}(\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_m u_m) = \alpha_1 g_{m+1}(u_1) + \cdots + \alpha_m g_{m+1}(u_m) = 0,$$

donde la última igualdad es consecuencia de las igualdades (1.6). Por un procedimiento similar se comprueba que $f_2(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0$. Esto demuestra que $x \in H$, y siendo x arbitrario en E se concluye que $E \subseteq H$.
Recíprocamente, sea $x \in H$. Es decir, $x \in \mathbb{R}^n$ es tal que $f_1(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0$. Como el conjunto $\mathscr{B} = \{u_1, \ldots, u_m, u_{m+1}, u_{m+2}, \ldots, u_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ entonces existen escalares α_1, $\ldots$, α_m, β_1, $\ldots$, β_{n-m} tales que

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i u_{m+i},$$

entonces se tiene

$$0 = f_1(x) = g_{m+1}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i u_{m+i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_{m+1}(u_i) + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i g_{m+1}(u_{m+i}) = \beta_1,$$

donde la última igualdad es consecuencia de las igualdades (1.6. Y así en general para todo $j = 1, \ldots, n-m$,

$$0 = f_j(x) = g_{m+j}\left(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i u_{m+i}\right) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i g_{m+j}(u_i) + \sum_{i=1}^{n-m} \beta_i g_{m+j}(u_{m+i}) = \beta_j$$

es decir, $\beta_1 = \cdots = \beta_{n-m} = 0$. A su vez, esto implica que la representación de x se reduce a $x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i u_i$. En particular, x es elemento de E. Esto demuestra que $H \subseteq E$.

En conclusión
$$E = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0\right\}.$$
Esto concluye la primera parte del ejercicio.
Para la segunda parte, considere los vectores $v_1 = u_{m+1}$, $v_2 = u_{m+2}$, $\ldots$, $v_{n-m} = u_n$ (observe que estos son elementos de $\mathscr{B}$) y sea F el subespacio generado por $\{v_1, \ldots, v_{n-m}\}$. Considere la aplicación $T\colon \mathbb{R}^n = E \oplus F \to F$ definida por
$$T(x) = f_1(x)v_1 + \cdots + f_{n-m}(x)v_{n-m}.$$
Dado que los f_j son funcionales lineales, es claro que T es transformación lineal. Pero además,
$$T^{-1}(0) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ T(x) = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x)v_1 + \cdots + f_{n-m}(x)v_{n-m} = 0\}$$
y como los vectores $v_1, \ldots, v_{n-m}$ son linealmente independientes entonces
$$= \{x \in \mathbb{R}^n : \ f_1(x) = \cdots = f_{n-m}(x) = 0\} = E,$$
es decir, $E = T^{-1}(0)$. Además de esto T es sobreyectiva, pues si $y \in F$ entonces existen escalares y_1, $\ldots$, y_{n-m} tales que $y = y_1v_1 + \cdots + y_{n-m}v_{n-m}$. Si consideramos el vector $v = 0 + \sum_{i=1}^{n-m} y_i v_i \in \mathbb{R}^n$ se tiene entonces
$$\begin{aligned}
T(v) &= f_1(v)v_1 + \cdots + f_{n-m}(v)v_{n-m} \\
&= f_1\left(\sum_{i=1}^{n-m} y_i v_i\right)v_1 + \cdots + f_{n-m}\left(\sum_{i=1}^{n-m} y_i v_i\right)v_{n-m} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{n-m} y_i f_1(v_i)\right)v_1 + \cdots + \left(\sum_{i=1}^{n-m} y_i f_{n-m}(v_i)\right)v_{n-m} \\
&= y_1v_1 + \cdots + y_{n-m}v_{n-m} \\
&= y.
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n = E \oplus F \arrow[r, "T"] \arrow[rr, bend left, "A = h\circ T"] & F \arrow[r, "h"] & \mathbb{R}^{n-m}
\end{tikzcd}$$

Por otro lado, F es isomorfo a $\mathbb{R}^{n-m}$ (pues ambos son subespacios vectoriales de la misma dimensión finita) y si $h\colon F \to \mathbb{R}^{n-m}$ es tal isomorfismo concluimos que existe una aplicación lineal sobreyectiva $A\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-m}$ tal que $E = A^{-1}(0)$. Esta aplicación es dada por $A = h \circ T$. ∎

Caso específico

Como caso específico del Ejercicio 1.4, considere en $\mathbb{R}^3$ el subespacio vectorial
$$E = \{t(1, -1, 1) : \ t \in \mathbb{R}\}$$
Entonces E (observe que es una recta que pasa por el origen del $\mathbb{R}^3$) es subespacio vectorial 1-dimensional, por tanto existen $3 - 1 = 2$ funcionales lineales $f_1, f_2\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tales que

$E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}$. Siguiendo el procedimiento empleado en la demostración, considere en E la base $\mathscr{B}_E = \{(1,-1,1)\}$. A continuación extendemos $\mathscr{B}$ a una base de $\mathbb{R}^3$, la cual puede ser el conjunto $\mathscr{B} = \{(1,-1,1);(1,1,0);(-1,1,2)\}$. Entonces en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^3;\mathbb{R})$ hallamos una base $\mathscr{B}_{\mathscr{L}}$, que a su vez sea dual de $\mathscr{B}$. Esta es dada por el conjunto $\mathscr{B}_{\mathscr{L}} = \{g_1, g_2, g_3\}$, donde

$$g_1(x,y,z) = \frac{x-y+z}{3}, \quad g_2(x,y,z) = \frac{x+y}{2}, \quad g_3(x,y,z) = \frac{-x+y+2z}{6}.$$

Entonces escogemos los funcionales $f_1 = g_2$, $f_2 = g_3$. Es decir,

$$f_1(x,y,z) = \frac{x+y}{2}, \quad f_2(x,y,z) = \frac{-x+y+2z}{6}.$$

Entonces $f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0$ si, y solo si, $\dfrac{x+y}{2} = \dfrac{-x+y+2z}{6} = 0$ si, y solo si, $x = t, y = -t, z = t$, para cualquier $t \in \mathbb{R}$; es decir, $f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0$ si, y solo si, $(x,y,z) = (t,-t,t) = t(1,-1,1)$. Por tanto,

$$E = \{t(1,-1,1) : \mathbb{R}\} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : f_1(x,y,z) = f_2(x,y,z) = 0\}.$$

Si F es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1,1,0);(-1,1,2)\}$ entonces

$$F = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}.$$

La función $h\colon F \to \mathbb{R}^2$ definida como $h(x,y,z) = (x+z, z)$ es un isomorfismo entre F y $\mathbb{R}^2$. Por otro lado, la transformación lineal $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $T(x,y,z) = f_1(x,y,z)(1,1,0) + f_2(x,y,z)(-1,1,2)$ es tal que

$$\begin{aligned} T(x,y,z) &= \frac{x+y}{2}(1,1,0) + \frac{-x+y+2z}{6}(-1,1,2) \\ &= \left(\frac{2x+y-z}{3}, \frac{x+2y-z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right) \end{aligned}$$

entonces la composición $A := h \circ T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es tal que

$$A(x,y,z) = h(T(x,y,z)) = \left(\frac{x+2y+z}{3}, \frac{-x+y+2z}{3}\right).$$

Observando que $A(x,y,z) = (0,0)$ si, y solo si,

$$\frac{x+2y+z}{3} = \frac{-x+y+2z}{3} = 0$$

si, y solo si, $x = t$, $y = -t$, $z = t$, para todo $t \in \mathbb{R}$, entonces se concluye que $A^{-1}(0,0) = E$, tal como se afirmaba en el Ejercicio 1.4.