Ejercicio 1.3.

Sea E el espacio vectorial de las funciones bilineales $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Establezca un isomorfismo entre E y el espacio vectorial $M(n\times n)$ de las matrices reales $n\times n$. Defina función bilineal simétrica y muestre que tal isomorfismo lleva funciones bilineales simétricas en matrices simétricas. Muestre que la matriz correspondiente a una función bilineal φ es invertible si, y solamente si, φ es no-degenerada (esto es, $\varphi(x,y)=0$ para todo $y\in\mathbb{R}^n \Rightarrow x=0$).

Demostración. Se tiene

$$E=\left\{\varphi\colon \mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \mid \varphi \text{ es aplicación bilineal}\right\}$$

y considere en $\mathbb{R}^n$ la base canónica $\{e_1,\dots,e_n\}$. A cada $\varphi\in E$ asociamos la matriz $\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ cuyas entradas son dadas por $a_{ij}:=\varphi(e_i,e_j)$. Esto sugiere definir la función $\Psi\colon E\to M(n\times n)$ por medio de la regla

$$\Psi(\varphi)=\left[\varphi(e_i,e_j)\right]_{n\times n}. \tag{1.5}$$

1. Ψ es un isomorfismo de espacios vectoriales (y en particular E es de dimensión n^2).

   En efecto, en primer lugar Ψ es lineal, pues para todo $\varphi,\psi\in E$ y todo $\alpha\in\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Psi(\alpha\varphi+\psi)&=\left[\alpha\varphi(e_i,e_j)+\psi(e_i,e_j)\right]_{n\times n}\\&=\alpha\left[\varphi(e_i,e_j)\right]_{n\times n}+\left[\psi(e_i,e_j)\right]_{n\times n}\\&=\alpha\Psi(\varphi)+\Psi(\psi).\end{aligned}$$

   En segundo lugar, para mostrar que Ψ es inyectiva, considere $\varphi,\psi\in E$ tales que $\Psi(\varphi)=\Psi(\psi)$. Entonces

$$\left[\varphi(e_i,e_j)\right]_{n\times n}=\left[\psi(e_i,e_j)\right]_{n\times n},$$

   lo cual nos lleva a la igualdad $\varphi(e_i,e_j)=\psi(e_i,e_j)$, para todo $i,j=1,\dots,n$. Esto implica que para todo $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ y todo $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$, en $\mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i,j}x_iy_j\varphi(e_i,e_j)=\sum_{i,j}x_iy_j\psi(e_i,e_j)=\psi(x,y),$$

   luego $\varphi=\psi$.

   Finamente, para mostrar la sobreyectividad de Ψ, sea $A=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$ una matriz cualquiera. Defina $\varphi\colon\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ por medio de las igualdades

$$\varphi(x,y)=\varphi\left(\sum_{i=1}^n x_ie_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i,j}x_iy_ja_{ij}.$$

   En particular $\varphi(e_i,e_j)=a_{ij}$. Es claro que φ es bilineal, pues para $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^n y_ie_i$ y $z=\sum_{i=1}^n z_ie_i$, en $\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}\varphi(cx+z,y)&=\varphi\left(\sum_{i=1}^n(cx_i+z_i)e_i,\sum_{j=1}^n y_je_j\right)=\sum_{i,j}(cx_i+z_i)y_ja_{ij}\\&=c\sum_{i,j}x_iy_ja_{ij}+\sum_{i,j}z_iy_ja_{ij}\\&=c\varphi(x,y)+\varphi(z,y),\end{aligned}$$

y de manera análoga se demuestra que $\varphi(x, cy+w) = c\varphi(x,y)+\varphi(x,w)$.

Finalmente, en vista de la igualdad (1.5) y dado que $\varphi(e_i, e_j) = a_{ij}$ entonces

$$\Psi(\varphi) = \left[\varphi(e_i, e_j)\right] = \left[a_{ij}\right] = A.$$

Luego, φ es sobreyectiva.

2. **Definición.** Una aplicación bilineal $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es simétrica si para todo $x, y \in \mathbb{R}^n$, se cumple que $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.

   Denote por $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ a la colección de todas las aplicaciones bilineales simétricas $\varphi\colon \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Observe que si $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R})$ entonces

$$a_{ij} = \varphi(e_i, e_j) = \varphi(e_j, e_i) = a_{ji}.$$

   Es decir, si φ es función bilineal simétrica la correspondiente matriz $\Psi(\varphi) = [a_{ij}]$ es también simétrica. Es decir, el isomorfismo Ψ del item anterior transforma aplicaciones bilineales simétricas en matrices simétricas.

3. Ahora mostraremos que la matriz $\Psi(\varphi) = [\varphi(e_i, e_j)]$, asociada a una aplicación bilineal $\varphi: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, es invertible si, y solo si, φ es no degenerada.

   En efecto, en primer lugar observe que dados $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\varphi(x,y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i y_j \varphi(e_i, e_j) = x\Psi(\varphi)y^T.$$

   Aquí hacemos la identificación $x = (x_1, \ldots, x_n)$ con la matriz $\begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$ y algo similar para $y = (y_1, \ldots, y_n)$.

   Suponga entonces que $\Psi(\varphi)$ es invertible. Si fuera $\varphi(x,y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$ entonces $x\Psi(\varphi)y^T = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Asuma que $x\Psi(\varphi) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, entonces como la igualdad $x\Psi(\varphi)y^T = 0$ es válida para todo $y \in \mathbb{R}^n$, en particular para cada $y = e_i$ se tiene

$$0 = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = a_i, \text{ para todo } i = 1, \ldots, n.$$

   Se concluye entonces que debe ser $x\Psi(\varphi) = 0$. Como $\Psi(\varphi)$ es invertible, y suponiendo que B es la inversa $\Psi(\varphi)$, entonces $x\Psi(\varphi)\cdot B = 0 \cdot B = 0$. Pero $\Psi(\varphi)\cdot B = I$(matriz identidad), luego resulta $x = 0$. Por tanto, φ es no degenerada.

   Recíprocamente, si la matriz $A = \Psi(\varphi)$ es no invertible entonces existe una solución no trivial al sistema $Ax = 0$. Es decir, existe un $x \neq 0$ en $\mathbb{R}^n$ tal que $xA = 0$ y, por tanto, para todo $y \in \mathbb{R}^n$ se tiene $xAy^T = 0$. Luego existe $x \neq 0$ tal que $\varphi(x,y) = 0$ para todo $y \in \mathbb{R}^n$. Es decir, φ es degenerada. ∎