Ejercicio 1.2.

Sea $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ el conjunto de las aplicaciones bilineales $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$. Muestre que las operaciones usuales hacen de E un espacio vectorial de dimensión mnp.

Demostración. Las operaciones (usuales) que hacen de $E = \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ un espacio vectorial son las siguientes: para cada $\varphi, \psi \in E$ y cada $\alpha \in \mathbb{R}$, se definen las funciones $\varphi + \psi$ y $\alpha\varphi$ como

$$(\varphi + \psi)(u, v) = \varphi(u, v) + \psi(u, v) \text{ y } (\alpha \cdot \varphi)(u, v) = \alpha \cdot \varphi(u, v),$$

para todo $(u, v) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Es sencillo comprobar que estas operaciones cumplen con todos los axiomas en la definición de espacio vectorial. Por ejemplo, el elemento neutro aditivo de E es la aplicación bilineal nula, esto es la aplicación $\varphi\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ dada por $\varphi(x, y) = 0$, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$, y donde 0 es el vector nulo de $\mathbb{R}^p$. Por otro lado, para cada $\varphi \in E$, el opuesto aditivo de esta función es aquella $-\varphi$ definida como $(-\varphi)(x, y) = -\varphi(x, y)$.
Pero además de esto, este espacio E es de dimensión mnp. Para mostrar esta última afirmación considere las bases canónicas $\{e_1, \ldots, e_m\}$, $\{\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n\}$ y $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de $\mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{R}^p$, respectivamente. Hecho esto, consideremos aplicaciones

$$\varphi_{ijk}\colon \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$$

definidas por

$$\varphi_{ijk}(x, y) = x_i y_j u_k.$$

En particular

$$\varphi_{ijk}(e_r, \bar{e}_s) = \begin{cases} u_k, & \text{si } (r, s) = (i, j); \\ 0, & \text{si } (r, s) \neq (i, j). \end{cases} \tag{1.4}$$

Para mostrar que cada φ_{ijk} es bilineal, sean $x = (x_1, \ldots, x_m)$, $z = (z_1, \ldots, z_m)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces

$$\varphi_{ijk}(\alpha x + z, y) = (\alpha x_i + z_i) y_j u_k = \alpha x_i y_j u_k + z_i y_j u_k = \alpha\varphi_{ijk}(x, y) + \varphi_{ijk}(z, y).$$

Análogamente se muestra que $\varphi_{ijk}(x, \alpha y + w) = \alpha\varphi_{ijk}(x, y) + \varphi_{ijk}(x, w)$. Por tanto, concluimos que cada φ_{ijk} es bilineal.
Afirmamos que el conjunto $\mathscr{B} := \{\varphi_{ijk}\colon 1 \le i \le m, 1 \le j \le n,\ 1 \le k \le p\}$ es una base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Observe que $\mathscr{B}$ tiene mnp elementos.
Para mostrar que el conjunto $\mathscr{B} := \{\varphi_{ijk}\}$ es linealmente independiente considere la combinación nula

$$\sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}\varphi_{ijk} = 0,$$

entonces para cada $1 \le r \le m$ y $1 \le s \le n$,

$$\sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}\varphi_{ijk}(e_r, \bar{e}_s) = 0,$$

luego, de las igualdades 1.4, resulta

$$\sum_{k=1}^{p} \alpha_{rsk} u_k = 0.$$

La independencia lineal de los vectores u_k implica

$$\alpha_{rs1} = \alpha_{rs2} = \cdots = \alpha_{rsp} = 0,$$

y como esto es válido para cada r, s, concluimos que $\alpha_{ijk} = 0$ para todo i, j, k.
Sólo resta ver que $\mathscr{B} := \{\varphi_{ijk}\}$ es un conjunto generador de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$. Para ello sea $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ una aplicación arbitraria y considere los escalares

$$\alpha_{ijk} := \left\langle T(e_i, \bar{e}_j), u_k \right\rangle,$$

donde $\langle\ ,\ \rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^p$. Entonces, nuevamente usando las igualdades (1.4),

$$\sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}\varphi_{ijk}(e_r, \bar{e}_s) = \sum_{k=1}^{p} \alpha_{rsk} u_k = \sum_{k=1}^{p} \langle T(e_r, \bar{e}_s), u_k \rangle \, u_k = T(e_r, \bar{e}_s).$$

Es decir, $T(e_r, \bar{e}_s) = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}\varphi_{ijk}(e_r, \bar{e}_s)$. Como esto es válido para todos los vectores básicos e_r y $\bar{e}_s$ concluimos en la igualdad $T = \sum_{i,j,k} \alpha_{ijk}\varphi_{ijk}$. Es decir, cada elemento del espacio $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^p)$ se expresa como combinación lineal de los elementos de $\mathscr{B}$.
En resumen, $\mathscr{B}$ es una base de E, y como $\mathscr{B}$ tiene mnp elementos se concluye que E es un espacio vectorial real cuya dimensión es mnp. ∎