CAPÍTULO

1

TOPOLOGÍA DEL ESPACIO EUCLIDIANO

1 EL ESPACIO VECTORIAL $\mathbb{R}^n$

Ejercicio 1.1 .

Muestre que las operaciones usuales de suma de aplicaciones y producto de una aplicación por un número real hacen del conjunto $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial. Análogamente para el conjunto $M(n\times m)$. Muestre que las biyecciones establecidas en el texto entre esos conjuntos y $\mathbb{R}^{mn}$ son isomorfismos entre espacios vectoriales. Exhiba explícitamente bases para los espacios $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y $M(n\times m)$.

Demostración. Este ejercicio consta de varias partes. Iremos resolviendo por separado cada una de estas.

1. Demostraremos que el conjunto $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, formado por todas las transformaciones lineales $T\colon \mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, es un espacio vectorial con las operaciones usuales.

   Dadas $S,T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, definimos $S+T\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ por medio de la regla
   $$(S+T)v = Sv+Tv, \text{ para todo } v\in\mathbb{R}^m.$$
   Aquí, la notación Tv significa $T(v)$. Además de esto, dado cualquier $\alpha\in\mathbb{R}$ definimos $\alpha\cdot T\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$ como
   $$(\alpha\cdot T)v=\alpha\cdot Tv, \text{ para todo } v\in\mathbb{R}^m.$$
   Es sencillo mostrar que $S+T$ y $\alpha\cdot T$ son transformaciones lineales. Por ejemplo, para todo $v,w\in\mathbb{R}^m$ y $c\in\mathbb{R}$,
   $$\begin{aligned}(S+T)(c\cdot v+w) &= S(c\cdot v+w)+T(c\cdot v+w) && \text{definición de } S+T\\ &=(c\cdot Sv+Sw)+(c\cdot Tv+Tw) && S \text{ y } T \text{ son transformaciones lineales}\\ &=c(Sv+Tv)+(Sw+Tw) && \text{reagrupamos las expresiones anteriores}\\ &=c(S+T)v+(S+T)w && \text{nuevamente definición de } S+T.\end{aligned}$$
   Esto demuestra que $S+T$ es transformación lineal; un procedimiento similar confirma que $\alpha\cdot T$ es también tiene dicha propiedad. Es decir, $S+T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, y también $\alpha\cdot T\in\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. Por simplicidad en la notación escribiremos αT en vez de $\alpha\cdot T$.

Una vez definidas estas operaciones, $(+)$ y $(\cdot)$, es sencillo mostrar que hacen de $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ un espacio vectorial real. Por ejemplo, respecto al axioma del elemento neutro aditivo en $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, ocurre que la transformación lineal nula cumple con tal propósito, es decir, la aplicación $O\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ definida por $Ov = 0$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$. Respecto al axioma del elemento inverso aditivo de cada $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, basta considerar la aplicación $-T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ definida como $(-T)v = -Tv$, para todo $v \in \mathbb{R}^m$.

2. Ahora demostraremos que el conjunto $M(n\times m)$, el cual es formado por todas las matrices reales de orden $n\times m$, es un espacio vectorial.

   Dadas las matrices $A = [a_{ij}]$ y $B = [b_{ij}]$ en $M(n\times m)$, y cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$, definimos $A+B$ y αA, como las matrices

   $$A+B = [a_{ij}+b_{ij}] \quad \text{y} \quad \alpha A = [\alpha a_{ij}].$$

   Al igual que en el item anterior, es sencillo ver que estas operaciones hacen de $M(n\times m)$ un espacio vectorial real. El elemento neutro aditivo en este caso es la matriz nula $A = [0]$, esto es, la matriz de orden $n\times m$ cuyas entradas son todas iguales a cero. Asimismo, para cada matriz $A = [a_{ij}]$, su inverso aditivo es la matriz $-A = [-a_{ij}]$.

3. Ahora mostraremos que los espacios vectoriales $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y $M(n\times m)$ son isomorfos. Para construir un isomorfismo entre estos espacios, considere en $\mathbb{R}^m$ la base canónica $\{e_j\colon j = 1,\ldots,m\}$ y en $\mathbb{R}^n$ la base canónica $\{\bar{e}_i\colon i = 1,\ldots,n\}$. Denote por $\langle\cdot,\cdot\rangle$ el producto interno usual en $\mathbb{R}^n$, esto es, dados $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, $\langle x, y\rangle := x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$.

   Dada una transformación $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ se tiene entonces, para cada $j = 1,2,\ldots,m$, que el vector Te_j se puede expresar como la combinación lineal $Te_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\bar{e}_i$. De esto, y usando el producto interno canónico en $\mathbb{R}^n$, se obtiene que $\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle = \langle \bar{e}_i, \sum_{k=1}^n a_{kj}\bar{e}_k\rangle$, luego $a_{ij} = \langle \bar{e}_i, Te_j\rangle$. Esto sugiere considerar la aplicación $\Phi\colon \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n) \to M(n\times m)$ que a cada $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ le hace corresponder la matriz

   $$\Phi(T) := [a_{ij}]_{n\times m} = [\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle]_{n\times m}.$$

   Mostraremos que Φ es un isomorfismo entre $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y $M(n\times m)$. En efecto, en primer lugar observe que para cada $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y cada $c \in \mathbb{R}$,

   $$\begin{aligned}\Phi(cT+S) &= [\langle \bar{e}_i, (cT+S)e_j\rangle]_{n\times m} = [\langle \bar{e}_i, cTe_j\rangle + \langle \bar{e}_i, Se_j\rangle]_{n\times m}\\ &= c\,[\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle]_{n\times m} + [\langle \bar{e}_i, Se_j\rangle]_{n\times m}\\ &= c\Phi(T) + \Phi(S),\end{aligned}$$

   luego Φ es transformación lineal.

   Para mostrar la inyectividad de Φ considere $T, S \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ tales que $\Phi(T) = \Phi(S)$. Entonces

   $$[\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle]_{n\times m} = [\langle \bar{e}_i, Se_j\rangle]_{n\times m}$$

   luego, de la definición de igualdad de matrices, se tiene $\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle = \langle \bar{e}_i, Se_j\rangle$, de donde $\langle \bar{e}_i, (T-S)e_j\rangle = 0$. Esto implica que para cada $y = \sum_{i=1}^n y_i\bar{e}_i \in \mathbb{R}^n$,

   $$\langle y, (T-S)e_j\rangle = \sum_{i=1}^n y_i \langle \bar{e}_i, (T-S)e_j\rangle = 0$$

y, por tanto, $(T-S)e_j = 0$ para cada $j = 1,\dots,m$. A su vez esto implica que para todo $x = \sum_{j=1}^m x_j e_j \in \mathbb{R}^m$

$$(T-S)x = \sum_{j=1}^m x_j (T-S)e_j = 0$$

de donde $T = S$. Entonces Φ es inyectiva.

Finalmente, para demostrar la sobreyectividad de Φ considere la matriz real $A = [\alpha_{ij}] \in M(n\times m)$. Usando *cada columna* de esta matriz, podemos construir los vectores $w_1,\dots,w_m \in \mathbb{R}^n$ tales que

$$w_j := \sum_{i=1}^n \alpha_{ij}\bar{e}_i, \quad j = 1,\dots,m. \tag{1.1}$$

Ahora defina la aplicación $T\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tal que para cada $x = \sum\limits_{j=1}^m x_j e_j \in \mathbb{R}^m$,

$$Tx := \sum_{j=1}^m x_j w_j.$$

Es sencillo mostrar que T es lineal, es decir, $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. En efecto, si $x = (x_1,\dots,x_m)$, $y = (y_1,\dots,y_m)$ son elementos en $\mathbb{R}^m$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

$$T(cx+y) = \sum_{j=1}^m (cx_j + y_j)w_j = c\sum_{j=1}^m x_j w_j + \sum_{j=1}^m y_j w_j = cTx + Ty.$$

Como en el caso particular de $x = e_j$ se tiene $Te_j = w_j$ entonces de las igualdades (1.1) resulta

$$\alpha_{ij} = \langle \bar{e}_i, w_j\rangle = \langle \bar{e}_i, Te_j\rangle,$$

luego $\Phi(T) = [\langle \bar{e}_i, Te_j\rangle] = [\alpha_{ij}] = A$, es decir, Φ es sobreyectiva.

Con esto acaba la verificación de que los espacios $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ y $M(n\times m)$ son isomorfos.

4. Para verificar que los espacios $M(n\times m)$ y $\mathbb{R}^{nm}$ son isomorfos, basta considerar la aplicación $\Psi\colon M(n\times m) \to \mathbb{R}^{nm}$ tal que a cada matriz $A = [a_{ij}]_{n\times m}$ le hace corresponder el vector

$$\Psi(A) := (a_{11}, a_{21},\dots,a_{n1}, a_{12}, a_{22},\dots,a_{n2},\dots,a_{1m}, a_{2m},\dots,a_{nm}).$$

Observe que $\Psi(A)$ se obtiene simplemente escribiendo cada columna de A en forma de una fila, una después de otra. Es sencillo ver que Ψ es un isomorfismo entre los espacios $M(n\times m)$ y $\mathbb{R}^{nm}$.

5. Ahora vamos a exhibir una base para $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$. Para ello considere las bases canónicas $\{e_1,\dots,e_m\}$ y $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ de $\mathbb{R}^m$ y $\mathbb{R}^n$, respectivamente. Para cada $i = 1,\dots,m$ y cada $j = 1,\dots,n$, considere las aplicaciones $T_{ij}\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ tales que si $x = \sum_{k=1}^m x_k e_k$ entonces

$$T_{ij}(x) := x_i \bar{e}_j. \tag{1.2}$$

En particular,

$$T_{ij}(e_k) = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq k \\ \bar{e}_j, & \text{si } i = k. \end{cases} \tag{1.3}$$

Es claro que cada una de las aplicaciones T_{ij} es lineal, pues si $x=\sum_{k=1}^{m} x_k e_k$ e $y=\sum_{k=1}^{m} y_k e_k$ son elementos de $\mathbb{R}^m$ y $c\in\mathbb{R}$ entonces

$$T_{ij}(cx+y)=T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{m}(cx_k+y_k)e_k\right)=(cx_i+y_i)\bar{e}_j=cx_i\bar{e}_j+y_i\bar{e}_j=cT_{ij}(x)+T_{ij}(y).$$

Pero mas aún, el conjunto $\mathscr{B}=\{T_{ij}:\ i=1,\dots,m,\ j=1,\dots,n\}$ es una base del espacio vectorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

En efecto, para mostrar la independencia lineal de $\mathscr{B}$ considere la combinación lineal nula

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}T_{ij}=0.$$

Entonces en cada vector básico e_k se tiene

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}T_{ij}(e_k)=0,$$

y de las igualdades (1.3) esto se reduce a

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\bar{e}_j=0.$$

Como $\{\bar{e}_1,\dots,\bar{e}_n\}$ es base de $\mathbb{R}^n$ entonces $\alpha_{k1}=\cdots=\alpha_{kn}=0$, y siendo k arbitrario concluimos que $\alpha_{ij}=0$, para todo $i=1,\dots,m$ y todo $j=1,\dots,n$.

Por otro lado, para mostrar que $\mathscr{B}$ genera a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$, considere una transformación lineal arbitraria $T\colon\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$. Considere los escalares $\alpha_{ij}:=\langle T(e_i),\bar{e}_j\rangle$ y la aplicación

$$S=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}T_{ij}.$$

Entonces

$$S(e_k)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}T_{ij}(e_k)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_{kj}\bar{e}_j=\sum_{j=1}^{n}\langle T(e_k),\bar{e}_j\rangle\bar{e}_j=T(e_k).$$

Como esto es válido para todo $k=1,\dots,m$ se concluye que $S=T$. Es decir, $T=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}T_{ij}$. Esto muestra que $\mathscr{B}$ genera a $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$.

Finalmente como $\mathscr{B}$ tiene mn elementos concluimos que $\mathscr{L}(\mathbb{R}^m;\mathbb{R}^n)$ tiene dimensión mn.

6. Para exhibir una base del espacio $M(n\times m)$, considere la colección

$$\mathscr{M}:=\{A_{ij}\colon i=1,\dots,n\ ,\ j=1,\dots,m\},$$

donde $A_{ij}=[a_{rs}]_{n\times m}$ es la matriz tal que

$$a_{rs}=\begin{cases}1, & \text{si } r=i \text{ y } s=j\\ 0, & \text{si } r\neq i \text{ ó } s\neq j\end{cases}$$

Por ejemplo,

$$A_{11}=\begin{bmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times m},\ A_{12}=\begin{bmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times m},\ \dots,\ A_{1n}=\begin{bmatrix}0&0&\cdots&1\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&\ddots&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\end{bmatrix}_{n\times m}.$$

No es complicado mostrar entonces que $\mathscr{M}$ es una base para $M(n\times m)$. ∎